Obliczenie ilości użytkowników systemu *Cheetah*

Sergey Poznyakoff

8 czerwca 2006

Spis treści

Rozdział 1

Ogólne wiadomości

Każdy użytkownik systemu *Cheetah* może zaprosić pewną liczbę nowych użytkowników, czyli spowodować ich rejestrację w systemie. Ilość takich rejestracji określa się przez *liczbę zaproszeń*, przypisaną danemu użytkownikowi. Ponieważ na obecnym etapie łączna liczba użytkowników w systemie *Cheetah* jest ograniczona, początkowa ilość zaproszeń posiadanych przez użytkownika ma być malejącą funkcją jego numeru w systemie.

Zbiór kont *Cheetah* składa się z określonej ilości N_r kont *wolnej rejestracji* oraz ilości N_z kont wydzielonych do zaproszeń. Rejestracja jest otwarta dopóty, dopóki istnieją niezajęte konta wolnej rejestracji. Po wypełnieniu liczby N_r podalsza rejestracja użytkowników jest możliwa tylko poprzez system zaproszeń.

Funkcja liczby zaproszeń określa się wzorem:

$$f(i) = \begin{cases} B, & \text{dla } i < N_r \\ B - \left[\frac{i}{m}\right], & \text{dla } i \geqslant N_r \end{cases}, \tag{1.1}$$

gdzie B i m są pewnymi stałymi, i jest numerem użytkownika w systemie, nawiasy zaś kwadratowe oznaczają całkowitą część ilorazu.

Celem niniejszego opracowania jest obliczenie ilości kont generowanych przez funkcję 1.1, czyli

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^{Bm} f(i), \tag{1.2}$$

górna granica sumowania jest wybrana na podstawie tożsamości:

$$f(Bm) = 0;$$

W wypadku gdy $N_r = 0$, suma 1.2 redukuje się do

$$N' = S_{Bm} + 1 \tag{1.3}$$

gdzie S_{Bm} jest sumą początkowych Bm wyrazów ciągu

$$a_i = B - \left[\frac{i}{m}\right] \tag{1.4}$$

czyli

$$S_{Bm} = \sum_{i=0}^{Bm} \left(B - \left[\frac{i}{m}\right] \right) \tag{1.5}$$

Rozdział 2

Suma ciągu $a_i = \left[\frac{i}{m}\right]$

Obliczmy sumę:

$$S'_n = \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{i}{m}\right] \tag{2.1}$$

Zakładając:

$$n = km + l; l < m$$

otrzymujemy:

$$S'_n = \sum_{i=0}^{km+l} \left[\frac{i}{m}\right] = \sum_{i=0}^{km-1} \left[\frac{i}{m}\right] + \sum_{i=km}^{km+l} \left[\frac{i}{m}\right] = \sigma_1 + \sigma_2 \tag{2.2}$$

Obliczenie sum σ_1 i σ_2 daje:

$$\sigma_1 = \sum_{i=0}^{km-1} \left[\frac{i}{m}\right] = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m} i = \sum_{i=0}^{k-1} mi = m\sum_{i=0}^{k-1} i = \frac{mk(k-1)}{2} \tag{2.3}$$

$$\sigma_2 = \sum_{i=km}^{km+l} \left[\frac{i}{m}\right] = \sum_{j=0}^{l} \left[\frac{km+j}{m}\right] = \sum_{j=0}^{l}(k + \left[\frac{j}{m}\right]) = \sum_{j=0}^{l} k + \sum_{j=0}^{l} \left[\frac{j}{m}\right] = k(l+1) \tag{2.4}$$

W końcu otrzymujemy:

$$S'_{km+l} = \sum_{i=0}^{km+l} \left[\frac{i}{m}\right] = \frac{mk(k-1)}{2} + k(l+1) \tag{2.5}$$

Rozdział 3

Suma ciągu S_n

Wróćmy do ciągu

$$S_n = \sum_{i=0}^{n}\Big(B - \left[\frac{i}{m}\right]\Big) \tag{3.1}$$

Zakładając znów $n = km + l$, gdzie $l < m$, otrzymujemy:

$$S_{km+l} = \sum_{i=0}^{km+l}\Big(B - \left[\frac{i}{m}\right]\Big) = \sum_{i=0}^{km+l} B - \sum_{i=0}^{km+l}\left[\frac{i}{m}\right] = B(km+l+1) - \frac{mk(k-1)}{2} - k(l+1) \tag{3.2}$$

Dla sumy 1.5 otrzymujemy:

$$S_{Bm} = \begin{vmatrix} k = B \\ l = 0 \end{vmatrix} = B(Bm+1) - \frac{mB(B-1)}{2} - B$$

$$= B^2m - \frac{mB(B-1)}{2} = \frac{2B^2m - B^2m + Bm}{2}$$

$$= \frac{mB(B+1)}{2} \tag{3.3}$$

Rozdział 4

Podsumowanie

Zgodnie ze wzorem 1.3, ilość kont otrzymanych przy $N_r = 0$:

$$N' = \frac{mB(B+1)}{2} + 1 \tag{4.1}$$

By obliczyć ilość kont w ogólnym wypadku 1.1, zauważmy, że gdyby pierwsze N_r kont posiadały liczby zaproszeń obliczone zgodnie z 1.4, utworzyły by one łącznie $S_{N_r} + 1$ kont. Gdy natomiast każde z tych kont posiada liczbę zaproszeń B, utworzy się łącznie $B(N_r+1)$ kont. Takim czynem, otrzymujemy następujący wzór dla łącznej ilości kont:

$$\bar{N} = N' - S_{N_r} - 1 + B(N_r + 1) = \frac{mB(B+1)}{2} - S_{N_r} + B(N_r + 1) \tag{4.2}$$